

文章编号: 1000-8055(2004) 05-0678-06

# 基于 $B$ 参数的轴流压气机 过失速稳定性分析

陈 策<sup>1</sup>, 李 军<sup>2</sup>

(1. 北京航空工程研究中心, 北京 100076;

2. 空军工程大学工程学院 飞机推进系统实验室, 陕西 西安 710038)

摘要: 基于 2 阶 Greitzer 模型, 按照  $B$  参数的变化, 通过对系统方程进行局部线性化, 把从失速到喘振的过失速过程划分为 4 个阶段进行非线性分析, 不仅观察到了临界点附近的系统变化规律, 而且可以准确判定临界点的位置。在  $B$  参数大于临界点时的情况下, 引入了 Lyapunov 稳定性理论和局部不变集定理对系统进行全局稳定性分析, 结合仿真结果, 表明系统轨迹趋近于稳定的喘振极限环。

关键词: 航空、航天推进系统; 轴流式压气机; 过失速;  $B$  参数; Lyapunov 稳定性

中图分类号: V231.3

文献标识码: A

## Stability Analysis of Axial-Flow Compressor Post-Stall Transients Based on Parameter $B$

CHEN Ce, LI Jun

(1. Beijing Aeronautical Engineering Technical Research Center,

Beijing 100076, China;

2. Aircraft Propulsion System Laboratory, Air Force Engineering University,

Xi'an 710038, China)

**Abstract:** Based on 2-order Greitzer model of axial flow compressor, a nonlinear analysis of the stall to surge process has been carried out. According to the variation of parameter  $B$ , the process was divided into four successive phases, and the compressor system equation was locally linearized. The trend of the system change near the critical point of parameter  $B$  was observed and the critical point could be determined accurately. Under the condition that parameter  $B$  exceeds its critical value, theorems of Lyapunov stability and local invariable set were introduced to global stability analysis to make up the shortage of local linearization methodology. Compared with numerical simulation, the fact was proved that the compressor system produces stable limit cycle of surge and the system locus converges in finite domain.

**Key words:** aerospace propulsion system; axial-flow compressor; post-stall; parameter  $B$ ; Lyapunov stability

Greitzer 首先建立了轴流压气机过失速行为的不可压模型<sup>[1]</sup>, 根据系统参数、压气机轴对称特性线对不稳定性的影响, 认为对于任意的压缩系统都有一个临界的  $B$  参数值( $B_{cr}$ )。试验表明: 当工作点  $B < B_{cr}$  时, 不稳定状态为旋转失速,  $B > B_{cr}$ , 不稳定状态为喘振。研究  $B$  参数对于划分轴流压气机的过失速状态具有重要意义。初期的研究主要是基于数值仿真和试验结果的定性分析, 这些分析印证了  $B$  参数对于不稳定行为影响的基本结论, 而且容易进行简单粗略的不稳定状态判定。但是也有明显不足: (1) 临界的  $B$  参数值不易精确判定。(2) 仿真与试验结果往往针对某一具体系统情况, 不能从系统模型出发得到比较通用的分析方法。针对以上的不足, 近年来国内外开展了一系列研究。Mccaughan<sup>[2]</sup> 最早从微分方程和动力系统角度分析了  $B$  参数对不稳定行为的影响, 认为  $B$  参数是压缩系统过失速行为的决定因素。Abed 和 Liaw<sup>[3,4]</sup> 采用 2 阶 Moore-Greitzer 的集总参数模型分析了基于  $B$  参数的压缩系统状态方程局部非线性行为。Agarwal<sup>[5]</sup> 分析了  $B$  参数作用下, 压缩系统的分叉行为和喘振极限环的问题。这些研究, 一方面印证了实验结果和数值仿真的分析, 加深了对于喘振和旋转失速这两种过失速状态的认识, 另一方面, 从系统模型出发, 使用解析的方法来分析过失速行为, 为准确预测压气机的过失速状态开辟了新的途径。

本文根据 Greitzer 的轴流压缩系统非线性微分方程模型的特点, 从微分方程和动力系统的角度对系统过失速行为进行分析, 有助于了解过失速行为的机理, 并且为设计合理的非线性控制策略提供基础。

### 1 压缩系统从失速到喘振的过失速过程

Greitzer 在 1976 年提出了 2 阶集总参数的数学模型<sup>[1]</sup>, 这个模型由于未能考虑旋转失速的周向特性, 所以不能够比较精确的反映过失速流动过程。但是由于它包含了  $B$  参数, Greitzer 认为该模型可以精确预测压气机进入过失速之后, 将会处于何种状态, 是失速还是喘振<sup>[6]</sup>。在此基础上, 使用 4 阶龙格-库塔法进行数值仿真, 可以看出  $B$  参数对于压缩系统不稳定流动的影响, 总体来讲是一个从过阻尼系统行为发展为欠阻尼系统行为的过程。较大的  $B$  参数导致不稳定流动呈现喘

振状态, 较小的  $B$  参数则呈现失速状态, 失速和喘振的分界点由临界点的  $B_{cr}$  值决定。因此, 注意观察临界点  $B_{cr}$  附近, 由失速转变到喘振的流动情况, 如图 1 所示。

由图 1(a) 可见, 此时  $B < B_{cr}$ , 当  $B$  参数增加至接近临界点  $B_{cr}$  时, 出现两个耦合在一起的周期解, 一个是稳定的周期解, 它表示了即将产生的喘振极限环(surge limit cycles), 另一个是不稳定的周期解, 它表示一个抵抗喘振的振荡(antisurge oscillation), 这个振荡包含着即将产生的极限环, 从图上看就是一个极限环从平衡点上逐渐“冒”出来。当  $B$  值继续增大直到接近  $B_{cr}$  时, 稳定的周期解增强, 抵抗喘振的振荡则减弱, 从图 1(b) 上看出, 平衡点上出现的极限环进一步增大。当  $B$  值增大到刚好大于  $B_{cr}$  时, 抵抗喘振的振荡将反而被包含在喘振极限环内部, 并且进一步减弱, 而喘振极限环则不断增强, 如图 1(c) 所示。当  $B$  进一步增加时, 反喘振振荡的振幅将很快减小直到消失, 如图 1(d), 喘振极限环完全形成, 压缩系统进入典型的喘振状态。

通过数值仿真, 观察到了临界点  $B_{cr}$  附近的系统变化规律。现在的问题是如何确定临界点  $B_{cr}$  的值? 我们希望通过解析方法来精确判定这个值, 这样不仅比通过数值仿真的方法更简便, 而且可以根据  $B$  参数来预测压气机的过失速状态。

### 2 压缩系统过失速行为的非线性分析

#### 2.1 过失速行为的非线性局部分析

根据 2 阶集总参数的数学模型, 可以得到它的局部线性化方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\Psi_c'(\Phi^0) & -B \\ \frac{1}{B} & -B\Psi_c^{-1}T(\Psi^0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

特征值方程为:

$$\lambda^2 + \left[ \frac{\Psi_T^{-1}(\Psi^0)}{B} - B\Psi_c'(\Phi^0) \right] \lambda - \Psi_c'(\Phi^0) \Psi_T^{-1}(\Psi^0) + 1 = 0 \quad (2)$$

其中:  $(\Phi^0, \Psi^0)$  表示系统的平衡点。

根据文献[7], 压气机特性线通常用一个 3 次多项式来近似表达为:

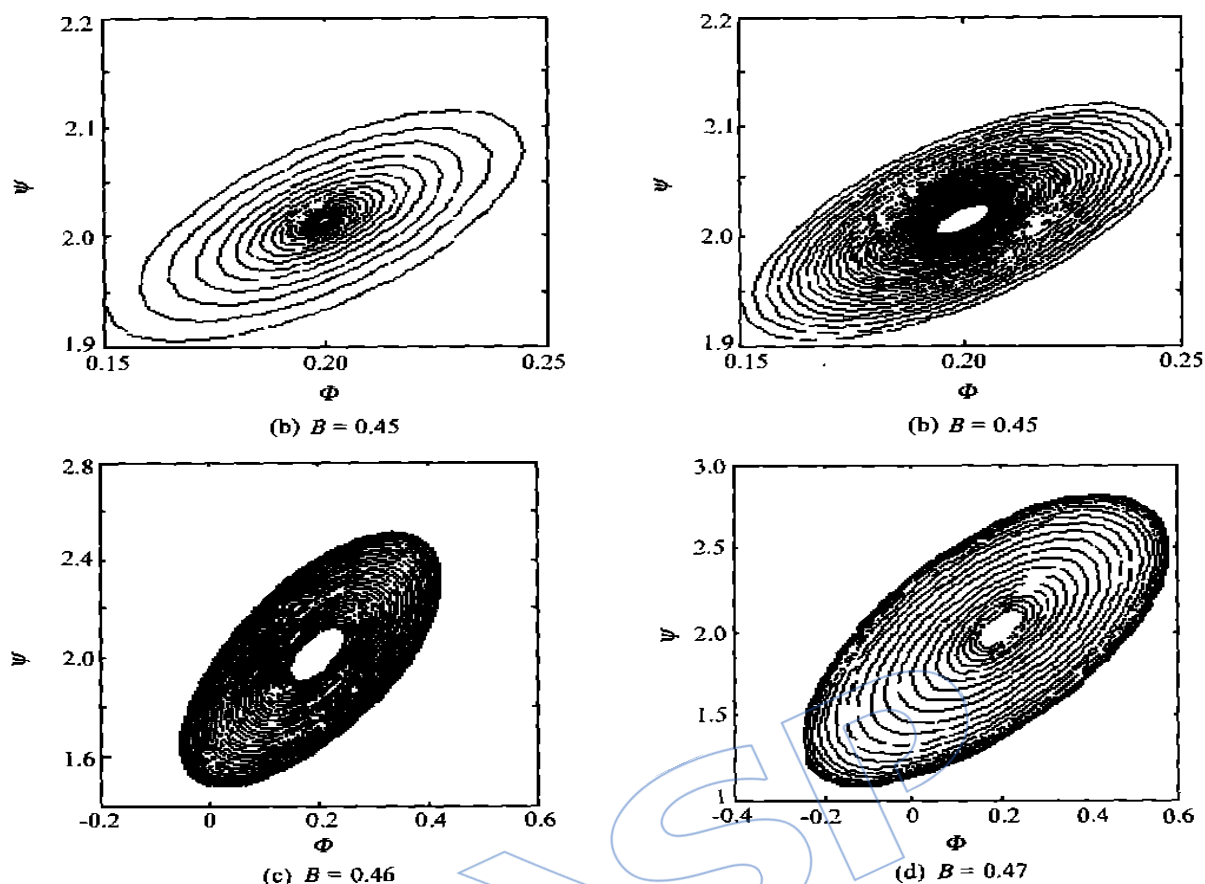


图 1 从失速到喘振的变化过程

Fig. 1 Transformation process from stall to surge

$$\Psi_c(\Phi) = 1.71875 + 1.5\Phi - 0.5\Phi^3 \quad (3)$$

节流方程为:

$$\Psi_T(\Phi) = \Gamma_T(\Phi + 1)^2 \quad (4)$$

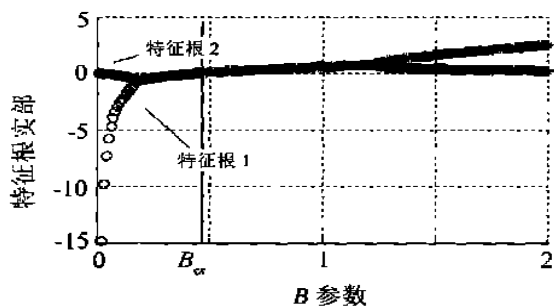
节流方程反映了节流阀某一开度下, 压降  $\Psi$  和流量  $\Phi$  的关系特性, 令节流系数  $\gamma_T = 1.4$ , 此时节流线和特性线的交点是特性线上压升系数的最高点, 也就是失速平衡点。失速平衡点通过求解特性线方程与节流线方程的交点得到:  $\Psi = 2.0147$ ,  $\Phi = 0.2$ 。

求解特征值方程可以得到特征值随着  $B$  值的变化而变化的情况。如图 2 所示。图中圆圈表示特征根的实部为负, 即局部稳定; 星号表示特征根的实部为正, 即局部不稳定。

随着  $B$  参数变化, 特征根变化的情况可以分为 4 个阶段:

阶段 1:  $B$  从 0 变化到 0.17 时, 2 个特征值均为负实数, 平衡点属于稳定节点(stable node), 系统轨迹将直接收敛到失速平衡点而没有振荡。这属于典型的失速情况, 此时对应于较小的  $B$  的情况。

阶段 2:  $B$  从 0.17 变化到 0.455 时, 2 个特征值为共轭复数, 两者实部都为负, 此时对应稳定焦点(stable focus)。轨迹在收敛于失速平衡点之前, 一次或者多次绕着原点旋转。系统瞬态为欠阻尼状态, 呈现振荡, 此时对应于中等的  $B$  的情况。

图 2 特征值实部随着  $B$  参数变化而变化的情况Fig. 2 Variation of eigen value real-part with parameter  $B$ 

阶段 3: 当  $B$  等于 0.455 时, 2 个特征值实部同时变为零, 出现纯虚数特征值, 这时平衡点成为中心(center point)。系统轨迹是椭圆的, 而且椭圆

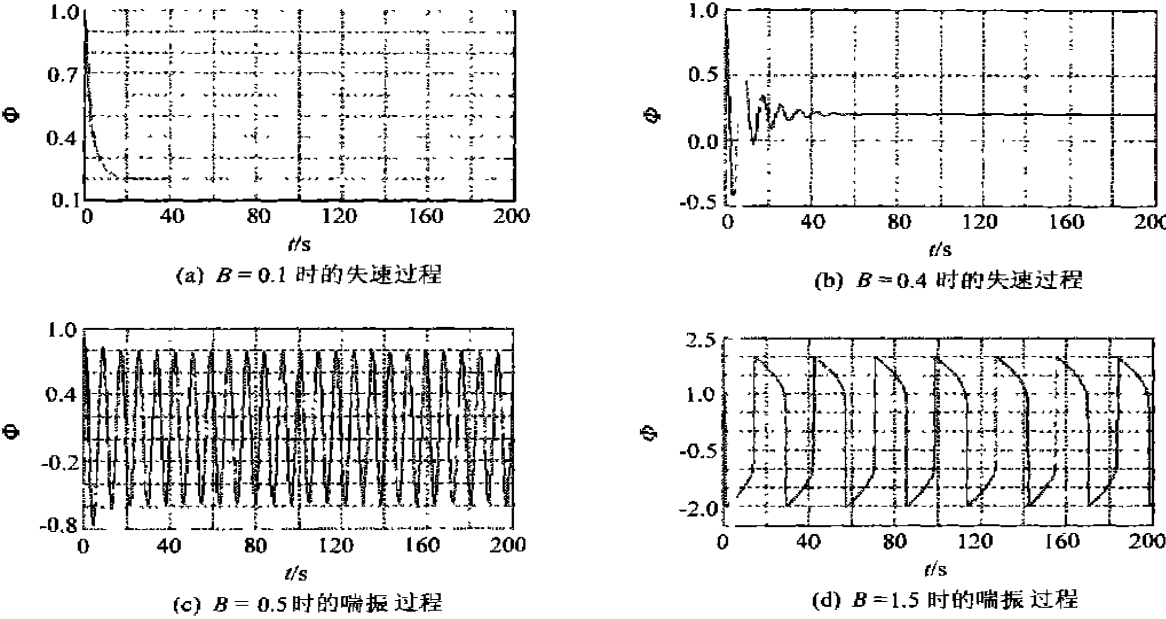


图 3  $B$  参数变化引起的轴流压缩系统过失速行为的变化  
Fig.3 Variation of axial flow compressor post-stall with parameter  $B$

的奇点就是失速的平衡点。当  $B$  在 0.455 到 1.21 之间时, 2 个特征根为共轭复数, 且实部同时为正, 此时对应不稳定焦点(unstable focus), 轨迹将不会收敛失速平衡点, 此时对应于较大的  $B$  的情况。

阶段 4: 当  $B$  大于 1.21 时, 2 个特征值均为实数, 且都为正, 此时对应不稳定节点(unstable node), 轨迹将不会收敛失速平衡点, 平衡点附近的轨迹发散到无穷远。此时对应于非常大的  $B$  的情况。

当  $B$  等于 0.455 时, 2 个特征值实部由负变为正, 系统状态也就由失速变化为喘振。从图 2 中可以看出, 以临界点  $B_{cr}$  为界, 临界点左边是局部稳定区域, 临界点右边是局部不稳定区域。因此可以断定临界点  $B_{cr} = 0.455$ 。

分别选择  $B$  参数处于上述 4 个阶段的情况, 进行数值仿真, 如图 3 所示。可以发现, 根据特征值随着  $B$  参数变化的特征, 分析对应的过失速状态, 其结果与数值仿真所体现的状况是一致的。

数值仿真表明, 当  $B > B_{cr}$  的时候, 系统轨迹将趋近于稳定的极限环。通过对系统方程在平衡点进行线性近似的方法, 仅仅知道此时系统轨迹将不会收敛失速平衡点, 平衡点附近的轨迹发散到无穷远, 这时系统轨迹稳定与否, 是否趋近于稳定的极限环, 将无法用局部线性化的理论来解释, 因此需要其他的方法来分析此时的系统行为。

2.2 过失速行为的非线性全局分析

使用非线性系统的线性近似来判断原先系统的稳定性只是对平衡点的邻域才有效, 至于在更大范围里面非线性系统是否稳定, 在多大的范围里能够收缩到平衡点, 这就有一个吸引域的问题, 吸引域的大小与线性近似对原来的非线性系统的相似程度有关。根据试验结果和数值仿真知道, 当  $B > B_{cr}$  时, 系统必将会出现喘振极限环。这个极限环是否稳定? 初始工作点的不同是否会影响到最终的过失速行为? 以上问题无法使用平衡点局部分析来解决。为了将平衡点概念进行推广, 这里给出局部不变集定理<sup>[8]</sup>。

定义 1 (局部不变集)

如果每条起始于集合  $G$  中的某点的系统轨线在未来任何时间里都保持在  $G$  内, 那么称  $G$  为动态系统的一个不变集。

定理 1 (局部不变集定理)

考虑压缩系统方程是自治系统,  $f$  是连续的, 而且令  $V(x)$  为具有连续偏导数得标量函数, 假设: 对于某个  $l > 0$ , 由  $V(x) < l$  定义的区域  $\Omega$  是有界的; 对所有的  $\Omega$  中的  $x, \dot{V}(x) \leq 0$ ; 令  $R$  为  $\Omega$  中所有  $\dot{V}(x) = 0$  的点的集合, 而  $M$  为  $R$  中最大的不变集, 那么当  $l \rightarrow \infty$  时起始于  $\Omega$  内的每一个解  $x(t)$  趋向于  $M$ 。  $M$  是  $R$  内所有的不变集(平衡点和极限环)的并集。

任何系统平衡点都是一个不变集, 一个平衡

点的吸引范围也是一个不变集, 极限环也是系统的不变集。当 Lyapunov 函数  $\dot{V}$  是半负定的时候, 不变集理论可以扩展 Lyapunov 函数的概念, 以便描述比收敛于平衡点更广泛的动态行为, 如收敛于稳定的极限环。

考虑到实际压缩系统中压升系数  $\Psi$  始终为正, 所以令  $\Psi = Z^2$ ,  $Z$  始终为正。考虑方程(3)和(4), 得到新的压缩系统方程:

$$\dot{\Phi} = B \cdot$$

由旋度条件:

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial Z} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial \Phi} \quad \text{有} \quad a_{12} + Z \frac{\partial a_{12}}{\partial Z} = a_{21} + \Phi \frac{\partial a_{21}}{\partial \Phi} \quad (9)$$

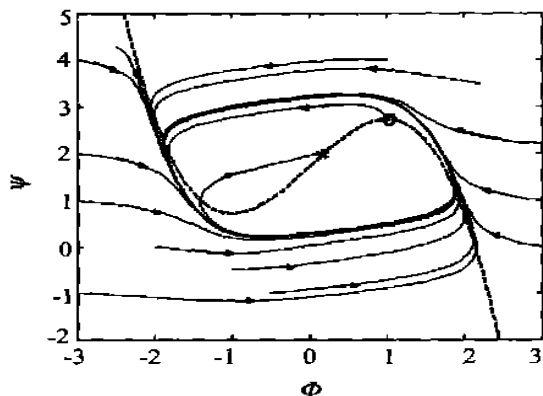
令  $a_{11}, a_{22}$  为任意正常数,  $a_{12} = a_{21} = \Phi Z$ , 有:

$$V = a_{11}\Phi^2 + 2\Phi^2 Z^2 + a_{22}Z^2 \quad (10)$$

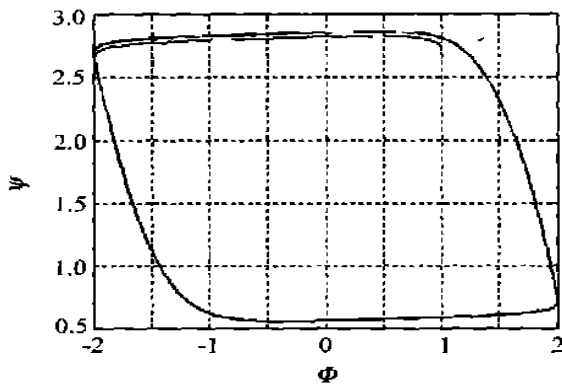
$$\dot{V} = \dot{\Phi}(2a_{11}\Phi + 2\Phi Z^2) + \dot{Z}(2a_{22}Z + 2\Phi^2 Z) \quad (11)$$

由方程(10)和(11), 得:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \left( 3.42Ba_{11} + \frac{1}{B}a_{22} \right) \Phi + \left( 3Ba_{11} + \frac{1}{B} \right) \Phi^2 + (3.42B - 2Ba_{11}) \Phi Z^2 - \\ & 0.8454 \frac{1}{B} a_{22} Z + \frac{1}{B} \Phi^3 + 3B \Phi^2 Z^2 + Ba_{11} \Phi^4 Z^2 - 2B \Phi Z^4 \end{aligned} \quad (12)$$



(a) 相空间图



(b) 数值仿真图

图 4 轨迹趋近于极限环时的系统相图

Fig. 4 Phase space portrait trajectory converging stable limit cycles

根据压缩系统方程(5)和(6), 做  $B > B_{\alpha}$  时, 压缩系统进入喘振的相图, 如图 4(a) 所示, 图中圆圈表示压缩系统可以取得的最大压升点, 星号表示系统的平衡点, 虚线为压缩系统特性线。在整个系统工作的有限域内, 系统不能稳定工作于平衡点和最大压升点, 系统轨迹毫无例外的趋近于稳定的喘振极限环。压缩系统方程具有明确的物理意义, 因此它的系统轨迹将维持在某个有限域内, 结合数值仿真的结果, 如图 4(b) 所示, 当系统出现唯一的稳定极限环之后, 这个极限环成为系统的吸引子 (attractor), 也就是说它成为了系统的

$$(1.71875 + 1.5\Phi - 0.5\Phi^3 - Z^2) \quad (5)$$

$$2\dot{Z}Z = \frac{1}{B} (\Phi - 0.8454Z + 1) \quad (6)$$

使用变量梯度法构造 Lyapunov 函数, 由方程(5)和(6), 假定待定的 Lyapunov 函数的梯度具有下面形式:

$$\nabla V_1 = a_{11}\Phi + a_{12}Z \quad (7)$$

$$\nabla V_2 = a_{21}\Phi + a_{22}Z \quad (8)$$

### 3 结 论

应用局部线性化方法对系统特征值进行分析, 可以准确判定临界点  $B_{cr}$  的位置。基于 Lyapunov 稳定性理论, 使用变量梯度法构造  $V$  函数, 然后引用局部不变集定理对该非线性系统进行了全局稳定性分析, 系统相图表明, 当  $B > B_{cr}$  时, 系统轨迹可以收敛到稳定的喘振极限环。

结合试验以及仿真结果, 表明这种分析方法在压气机特性线和节流线已知的情况下, 可以方便准确的定量分析  $B$  参数对轴流压气机的过失速行为的影响, 并且容易在系统模型中加入一定的控制量, 按照需要改变系统过失速的表现行为, 从而对压缩系统不稳定行为进行主动控制。

### 参考文献:

[1] Greitzer E M. Surge And Rotating Stall in Axial Flow Compressors, Part I: Theoretical Compression System Model, Part II: Experimental Results and Comparison with Theory [J]. *ASME Journal of Engineering for Power*, 1976, 98(2):

190– 198.

[2] McCaughan F E. Application of Bifurcation Theory to Axial Flow Compressor Instability [J]. *Journal of Turbo Machinery*, 1989, 111:426– 433.

[3] Liaw D C, Abed E H. Control of Compressor Stall Inception—A Bifurcation Theoretic Approach [J]. *Automatic*, 1996, 32: 109– 115.

[4] Liaw D C, Abed E H. Nonlinear Dynamics of Axial Flow Compressor: A Parameter Study [R]. *TR91– 32, University of Maryland*, 1991.

[5] Agarwal A. Bifurcation Analysis of Axial Compressor Instability [R]. *Indian Institute of Technology*, 1998.

[6] Moore F K, Greitzer E M. A Theory of Post-Stall Transients in Multistage Axial Compression System [R]. *NASA CR– 3878*, 1985.

[7] Larsen M, Collier B, Sepulchre R & Kokotovi P. Dynamic Control of Axial Compressors [R]. *Proc. 6th IEEE Conf. Control Applications*, 1997: 663– 670.

[8] 顾圣士. 微分方程和动力系统 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2000.

[9] 斯洛廷, 李卫平. 应用非线性控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1992.